



# Mejora de las Fronteras en Mallas Simpliciales de Múltiples Materiales Generadas a Partir de Imágenes

**Tony Liedyn Choque Ramos**

**Orientador: Dr. Alex J. Cuadros Vargas**

**Jurado:**

Dr. Jean Sequeira (Aix-Marseille Université - Francia)  
Dr. Luis Gustavo Nonato (Universidade de Sao Paulo - Brasil)  
Dr. José Ochoa Luna (Universidad Católica San Pablo - Perú)

*Tesis presentada al  
al Departamento de Ciencia de la Computación  
como parte de los requisitos para obtener el grado de  
Maestro en Ciencia de la Computación.*

**Universidad Católica San Pablo – UCSP  
Diciembre del 2018 – Arequipa – Perú**



*A mi familia.*



# Abreviaturas

**ODT** *Optimal Delaunay Triangulation*

**TSUR** *Trapezoidal Sub-grid Undulations Removal*

**R<sub>D</sub>** Reetiquetado determinístico

**I** Inserción de puntos

**R<sub>SA</sub>** Reetiquetado usando simulated annealing

**REP1** Reparación 1

**REP2** Reparación 2

**REP3** Reparación 3

**S<sub>R</sub>** Reetiquetado usando curvaturas discretas

**S<sub>V</sub>** Reubicación de vértices



# Agradecimientos

---

En primer lugar un agradecimiento especial a toda mi familia, especialmente a mis padres Fermín y Bernarda y mis hermanos Kelly y Jhonatan, por el apoyo y la paciencia, ellos siempre me acompañan, a mis amigos que compartieron su tiempo conmigo.

Deseo agradecer de manera especial al Consejo Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación Tecnológica (CONCYTEC) y al Fondo Nacional de Desarrollo Científico, Tecnológico e Innovación Tecnológica (FONDECYT-CIENCIACTIVA), que mediante Convenio de Gestión UCSP-FONDECYT N° 011-2013, han permitido la subvención y financiamiento de mis estudios de Maestría en Ciencia de la Computación en la Universidad Católica San Pablo (UCSP).

Agradezco de forma muy especial a mi orientador Alex Cuadros Vargas por su comprensión, paciencia y los conocimientos adquiridos.

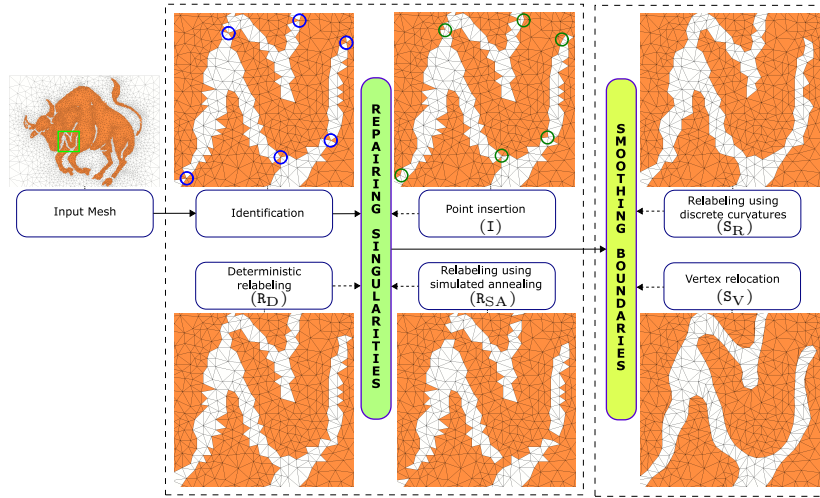
Deseo agradecer al personal administrativo de la universidad: Guillermo Laures y Carlos Begazo por su disposición al momento de ayudarnos durante la maestría.





# Abstract

---



A digital image may contain objects made up of multiple regions concerning different material properties, physical or chemical attributes. Thus, generating multi-material simplicial meshes (of 2 and 3 dimension) from images may produce singularities on boundaries between partitioned regions. Most of current methods remove singularities considering only meshes representing a single material or object. This work focuses on repairing singularities of meshes describing multiple objects. For this purpose, our approach is based on partitioning adjustment (relabeling) and point insertion, these ideas can be combined to improve different qualities: increase the speed, keep as much as possible the shape of the original partitioning or keep the number elements in the mesh. Our proposal was applied in different contexts, meshes with different number of singularities or materials, of 2 and 3 dimensions. In all cases, all the singularities were removed from the mesh. Additionally, once the mesh has no singularities, we could develop and apply some alternatives for boundary smoothing based on relabeling and vertex relocation.

**Keywords:** Computational Geometry, Mesh Processing, Mesh Generation, Mesh Repairing, Manifoldness.



# Resumen

---

Una imagen digital puede contener objetos compuestos de múltiples regiones que corresponden a diferentes propiedades del material, atributos físicos o químicos. Luego, al generar mallas simpliciales (en 2 y 3 dimensiones) de múltiples materiales a partir de imágenes, estas pueden contener singularidades en las fronteras entre las regiones particionadas. La mayoría de métodos actuales, que eliminan singularidades, consideran mallas que representan un solo objeto o material. Este trabajo se enfoca en la reparación de singularidades en mallas que contienen múltiples objetos o materiales. Para esto, utilizamos abordajes basados en la modificación del particionamiento (re-etiquetado) e inserción de puntos. Estas ideas pueden ser combinadas para optimizar diferentes factores tales como: incrementar la velocidad, mantener en lo posible la forma de la partición original y conservar el número de elementos en la malla. Nuestra propuesta ha sido aplicada en mallas con diferentes números de singularidades y materiales, tanto de 2 como 3 dimensiones. En todos los casos se logró eliminar la totalidad de singularidades en el modelo. Adicionalmente, luego de que el modelo esté libre de singularidades, este trabajo presenta también algunas alternativas para suavizar fronteras basadas en re-etiquetado de células y reubicación de vértices.

**Palabras clave:** Geometría Computacional, Procesamiento de Mallas, Generación de Mallas, Reparación de Mallas, Variedad.



# Índice general

<b>Índice de tablas</b>	<b>XV</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Trabajos Relacionados</b>	<b>3</b>
2.1. Reparación de singularidades en mallas . . . . .	3
2.2. Suavizado de fronteras en mallas . . . . .	4
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>7</b>
3.1. Malla simplicial . . . . .	7
3.1.1. Malla simplicial Delaunay . . . . .	8
3.1.2. Malla simplicial de múltiples materiales . . . . .	8
3.1.3. Camino visible . . . . .	8
3.2. Fronteras en mallas simpliciales . . . . .	9
3.2.1. Singularidades . . . . .	9
3.2.2. Test del grafo . . . . .	9
3.2.3. Adición de una célula . . . . .	10
3.2.4. Simulated annealing para reparar singularidades . . . . .	12
3.2.5. Curvatura discreta . . . . .	12
3.2.6. Suavizado conservando el volumen . . . . .	13

<b>4. Propuesta</b>	<b>17</b>
4.1. Reparación de singularidades . . . . .	18
4.1.1. Identificación de singularidades . . . . .	19
4.1.2. Reetiquetado determinístico (Reetiquetado determinístico ( $R_D$ ))	19
4.1.3. Inserción de puntos (Inserción de puntos (I)) . . . . .	21
4.1.4. Reetiquetado usando simulated annealing (Reetiquetado usando simulated annealing ( $R_{SA}$ )) . . . . .	23
4.1.5. Algoritmos para reparar singularidades . . . . .	26
4.2. Suavizado de fronteras . . . . .	28
4.2.1. Reetiquetado usando curvaturas discretas (Reetiquetado usando curvaturas discretas ( $S_R$ )) . . . . .	28
4.2.2. Reubicación de vértices (Reubicación de vértices ( $S_V$ )) . . . . .	29
<b>5. Resultados</b>	<b>31</b>
5.1. Notación usada en los resultados . . . . .	31
5.2. Resultados bidimensionales . . . . .	32
5.3. Resultados tridimensionales . . . . .	39
5.4. Análisis de los tiempos de ejecución . . . . .	51
5.4.1. Análisis bidimensional . . . . .	51
5.4.2. Análisis tridimensional . . . . .	52
<b>6. Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>55</b>
6.1. Limitaciones . . . . .	55
6.2. Trabajos futuros . . . . .	56
<b>Bibliografía</b>	<b>62</b>

# Índice de tablas

5.1. Comparación de las herramientas aplicadas a <i>Taurus</i> , Figura 5.1. . . .	32
5.2. Detalles de la reparación de singularidades en mallas 2D. . . . .	39
5.3. Detalles de las mallas generadas por $S_R$ en mallas 2D. . . . .	39
5.4. Detalles de la reparación de singularidades en mallas 3D. . . . .	44
5.5. Detalles de las mallas generadas por $S_R$ en mallas 3D. . . . .	51
5.6. Tiempos de ejecución del proceso de reparación de singularidades y suavizado de fronteras en mallas 2D. . . . .	52
5.7. Tiempos de ejecución del proceso de reparación de singularidades y suavizado de fronteras en mallas 3D. . . . .	53





# Índice de figuras

3.1. Camino visible. . . . .	8
3.2. Singularidades en mallas 2D y 3D. . . . .	9
3.3. Test del grafo en vértices de mallas 2D y 3D. . . . .	10
3.4. Adición de una célula en mallas 2D y 3D. . . . .	11
3.5. Adición de célula. . . . .	11
3.6. Curvatura discreta. . . . .	14
3.7. Método <i>Trapezoidal Sub-grid Undulations Removal</i> (TSUR)-2D (Sousa et al., 2007). . . . .	14
3.8. Método TSUR-3D (Sousa et al., 2007). . . . .	15
4.1. Etapas de la propuesta. . . . .	18
4.2. Malla abstracta y términos usuales. . . . .	18
4.3. Identificación de vértices singulares cuando $d = 2$ (arriba) y $d = 3$ (abajo). . . . .	19
4.4. Reetiquetado para reparar singularidades. . . . .	21
4.5. Inserción de un punto. . . . .	22
4.6. Casos de vértices singulares 2D y alternativas para repararlos. . . . .	23
4.7. Casos de vértices singulares 3D y alternativas para repararlos. . . . .	24
4.8. Reparación aleatoria. Creación de células de relleno en mallas 2D y 3D. Luego de esta etapa la malla es considerada válida. . . . .	25
4.9. Algoritmos de reparación de singularidades. . . . .	27

5.1. Herramientas para la reparación de singularidades aplicadas en <i>Taurus</i> . En estos resultados y los siguientes resaltamos los vértices singulares con círculos azules y los vértices insertados con círculos verdes Además, presentamos la distancia de Hausdorff desde el conjunto de facetas de frontera producidos hacia el conjunto de facetas de frontera originales, normalizada por la diagonal del cuadro delimitador. . . . .	33
5.2. Suavizado de fronteras en <i>Taurus</i> . . . . .	34
5.3. Algoritmos de reparación de singularidades en <i>Tweety</i> de 5 submallas. .	35
5.4. Iteraciones del algoritmo Reparación 3 (REP3) en <i>Tweety</i> . . . . .	35
5.5. Reetiquetado para suavizar una malla 2D de más de dos regiones. . . .	36
5.6. Reparación de singularidades en la malla <i>Titicaca Lake</i> de 2 submallas.	37
5.7. Suavizado de fronteras en <i>Titicaca Lake</i> . . . . .	37
5.8. Reparación de singularidades en <i>Thundercats</i> de 2 submallas. . . . .	38
5.9. Suavizado de fronteras en <i>Thundercats</i> . . . . .	38
5.10. Reparación de singularidades en la malla 3D <i>Hyena</i> con 2 submallas. .	40
5.11. Iteraciones del algoritmo REP3 en <i>Hyena</i> . . . . .	40
5.12. Algoritmo de reparación de singularidades aplicados en <i>Hyena</i> . Además presentamos la distancia de Hausdorff desde el conjunto de facetas de frontera producidos hacia el conjunto de facetas de frontera originales, normalizada por la diagonal del recuadro delimitador. . . . .	41
5.13. Reetiquetado para suavizar una malla 3D de dos regiones. . . . .	42
5.14. Reparación de singularidades de una malla 3D <i>Chest</i> con 4 submallas. .	43
5.15. Iteraciones del algoritmo REP3 en <i>Chest</i> . . . . .	43
5.16. Suavizado de fronteras en <i>Chest</i> . . . . .	44
5.17. Reparación de singularidades en la malla 3D <i>Head</i> de 3 submallas. . . .	45
5.18. Suavizado de fronteras en <i>Head</i> . . . . .	46
5.19. Reparación de singularidades en la malla 3D <i>Carp</i> con 3 submallas. . .	47
5.20. Suavizado de fronteras en <i>Carp</i> . . . . .	48
5.21. Reparación de singularidades en la malla 3D <i>Knee</i> con 8 submallas. . .	49
5.22. Suavizado de fronteras en <i>Knee</i> . . . . .	50

# Capítulo 1

## Introducción

El uso de una imagen digital es amplio en áreas como medicina, biología, mecánica, aeronáutica e ingenierías. Por ejemplo, las imágenes volumétricas provenientes de tomografías computarizadas o resonancias magnéticas han dado origen a modelos geométricos (Nikishkov et al., 2013; Kim et al., 2017) y estos a su vez han dado lugar al uso de técnicas de análisis de elementos finitos para simular fenómenos físicos (Ej. electroencefalograma y magneto encefalograma, neurocirugía guiada por imagen, modelado electromagnético y otros). En particular, las mallas simpliciales Delaunay son modelos geométricos con propiedades matemáticas destacables en comparación con las mallas grid o mallas quadtree y octree (Shewchuk et al., 2016). Las mallas simpliciales generadas a partir de imágenes volumétricas pueden representar diversos objetos con propiedades distintas, en el análisis de elementos finitos, estos objetos son agrupados en regiones o materiales con atributos químicos/físicos individuales.

Los métodos tradicionales para generar mallas simpliciales de múltiples materiales a partir de imágenes, aptas para técnicas de análisis de elementos finitos, usualmente consideran dos pasos: pre-procesamiento (filtros, segmentación, extracción de isosuperficies, suavizado de las isosuperficies, entre otros) y generación de la malla de calidad (Boltcheva et al., 2009; Zhang et al., 2010; Boissonnat et al., 2009; Bronson et al., 2014; Tran y Fang, 2017); estos métodos son aplicados normalmente a imágenes volumétricas.

Por otro lado, siguiendo un enfoque distinto, tenemos los trabajos de Španěl et al. (2007); Cuadros-Vargas et al. (2009); Chen y Wang (2016); Pennisi et al. (2016); Xu y Yu (2016), podemos resumir estos métodos en tres etapas. (a) Generación de la malla inicial, consiste en obtener un conjunto de puntos iniciales iterativamente o mediante un muestreo que permitan representar los objetos contenidos en una imagen, normalmente habrá mayor densidad de puntos en las fronteras que en el interior de los objetos, luego obtienen una malla inicial usando la triangulación de Delaunay en el conjunto de puntos iniciales. (b) Particionamiento de la malla, cada célula (triángulo o tetraedro) es descrito por una característica o vector de características (promedio de las intensidades de los colores, varianzas, histogramas, texturas, entre otros) que permiten el agrupamiento usando técnicas basadas en grafos, *k-means*, región en crecimiento o consideran una célula como un superpixel o supervoxel para realizar el particionamiento

---

(Veksler et al., 2010). (c) Mejora de la calidad de la malla, esta etapa no está incluida en algunos métodos o es incluida en la etapa previa, consiste en la mejora de las células mediante la reubicación de los vértices y la inserción de puntos.

En la etapa (b), la mayoría de las células son agrupadas correctamente, sin embargo, debido a la inexactitud de las características de las células en las fronteras, estas pueden ser agrupadas erróneamente a regiones vecinas. Esta es la causa de la presencia de irregularidades en las fronteras como singularidades y puntas.

El objetivo de esta tesis de maestría es investigar métodos para el tratamiento de estas irregularidades, para ello proponemos dos alternativas. La primera, descrita en la Sección 4.1, está enfocada en identificar y reparar singularidades en las fronteras de las mallas simpliciales de múltiple materiales, haciendo uso del reetiquetado determinístico, inserción de puntos y reetiquetado usando simulated annealing. La segunda, explicada en la Sección 4.2, alternativa apunta a suavizar las fronteras mediante el reetiquetado usando curvaturas discretas y la reubicación de vértices.

Es preciso señalar que en este caso el orden de los procedimientos es necesario, debido a que el método de suavizado de fronteras requiere una malla libre de singularidades como entrada. Luego de aplicar nuestra propuesta en mallas simpliciales de hasta 8 materiales, 100K vértices y con miles de vértices singulares obtenemos una malla simplicial de múltiples materiales con fronteras libres de singularidades y suavizadas en el transcurso de, a lo mucho, 2 minutos.

El resto de nuestro trabajo está organizado de la siguiente manera, en el Capítulo 2 presentamos la literatura vinculada a nuestra investigación, seguidamente en el Capítulo 3 describimos los conceptos utilizados en nuestro trabajo, luego en el Capítulo 4 se explica la propuesta del presente trabajo de maestría, después presentamos los resultados de nuestra propuesta en el Capítulo 5, finalmente en el Capítulo 6 describimos las conclusiones y trabajos futuros.

# Capítulo 2

## Trabajos Relacionados

Este Capítulo contiene información de la literatura relacionada a nuestra investigación, el tratamiento de irregularidades en las fronteras de mallas simpliciales de múltiples materiales. En la [Sección 2.1](#), presentamos trabajos relacionados a la reparación de singularidades en mallas. En la [Sección 2.2](#) comentamos métodos de suavizado en mallas.

### 2.1. Reparación de singularidades en mallas

En cierto número de aplicaciones la condición de malla libre de singularidades es obligatoria o muy importante, por ejemplo, en simulaciones quirúrgicas en tiempo real ([Forest et al., 2005](#)), es por ello, que investigaciones, dentro del campo de Reparación de Mallas, se ocupan de la eliminación de singularidades ([Attene et al., 2009](#)). La propiedad de variedad (*manifold*) en una malla, es decir una malla sin singularidades, se requiere para realizar cálculos de suavidad sobre una superficie. Gracias a esta propiedad, los operadores diferenciales continuos de normal y curvatura son extendidos al caso discreto, en general muchos de los algoritmos de Computación Gráfica no son aplicables si la malla no posee esta propiedad ([Lhuillier y Yu, 2013](#)).

En el campo de las mallas irregulares o no estructuradas, como principal objeto de investigación se encuentran las mallas superficiales. [Rossignac y Cardoze \(1999\)](#) proponen un método que consiste en identificar las aristas singulares, aquellas que tienen  $2k$  triángulos incidentes, donde  $k$  es constante, son divididas en  $k$  aristas *manifold*, sin embargo, la malla aún puede contener vértices singulares, para solucionarlas se duplican dichos vértices, la estrategia consiste en producir el mínimo número de duplicaciones. De igual forma [Guéziec et al. \(1998\)](#) propone una estrategia basada en dos operaciones importantes: *cutting* y *stitching*. La operación *cutting* consiste en identificar las aristas singulares y cortar la superficie alrededor de la arista. El resultado de la operación es una malla libre de singularidades, pero con espacios vacíos, luego se realiza la operación de *stitching* la cual involucra unir dos aristas colindantes con los espacios vacíos mien-

tras se garantiza la condición de variedad en la malla. De manera similar el trabajo de [Wagner et al. \(2003\)](#) utiliza los operadores *cutting* y *stitching* pero acompañado del método de optimización *simulated annealing* que minimiza los costos de curvatura y espacios vacíos en la malla. Esta alternativa ayuda a reconstruir la malla con ciertas garantías de calidad en la forma. En el trabajo de [Attene et al. \(2013\)](#) se resumen otras técnicas para la reparación de singularidades en mallas poligonales dependiendo del contexto y las necesidades.

Investigaciones en mallas de altas dimensiones han sido realizadas como en ([Forest et al., 2002](#)), donde el algoritmo es aplicado a una malla tetraédrica de un solo material y con una superficie que es variedad. Primero verifica si al remover un tetraedro se mantiene la propiedad de variedad, en caso contrario, realiza la búsqueda de un conjunto de tetraedros que permitan mantener esta propiedad. La búsqueda hace uso de métodos heurísticos como tomar en cuenta primero tetraedros adyacentes al tetraedro que debe ser removido. El algoritmo no garantiza encontrar el conjunto de tetraedros.

[Attene et al. \(2009\)](#) propone dos algoritmos de conversión de mallas tetraédricas *non-manifold* a mallas tetraédricas *manifold* utilizando los siguientes enfoques: (a) Modificar la conectividad solamente, consiste en duplicar los vértices singulares, para lograrlo utiliza una estructura de datos propia. (b) Modificar la conectividad y la geometría, trata de erosionar las aristas y vértices singulares, es decir, remover pequeñas cantidades de material alrededor de los vértices singulares.

Por otro lado, [Lhuillier \(2015\)](#) investigó sobre las singularidades en mallas tetraédricas y propuso un método para identificarlas basado en un grafo y además propone un método para añadir tetraedros a una malla mientras se preserva la propiedad de variedad, ambas propuestas son demostradas y aplicadas ([Lhuillier y Yu, 2013](#); [Lhuillier, 2017](#)).

[Wagner et al. \(2003\)](#), [Attene et al. \(2009\)](#) y [Lhuillier \(2015\)](#) son los trabajos que consideramos para proponer un método de reparación de singularidades en el contexto de esta investigación.

## 2.2. Suavizado de fronteras en mallas

De la misma forma que la sección previa, el suavizado en mallas ha estado siendo investigado principalmente en mallas superficiales. En el trabajo de [Botsch et al. \(2010\)](#) se considera el suavizado de mallas como el diseño y cálculo de funciones suaves  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^d$  en una malla poligonal, donde  $f$  puede ser escogido flexiblemente. Además, se consideran dos enfoques dentro del suavizado de mallas. (a) Remoción de ruidos (*denoising*), es utilizado para remover ruidos de alta frecuencia en  $f$ , para ello se requiere la generalización de conceptos como filtros paso bajo a funciones que describen mallas poligonales. (b) Carenado (*fairing*),  $f$  no suaviza ligeramente la malla, en cambio, suaviza la malla hasta donde sea posible, este enfoque es utilizado, por ejemplo, para rellenar huecos con parches suavizados. El carenado calcula directamente la superficie

límite del proceso iterativo de la remoción de ruidos.

Dentro del enfoque de los métodos de remoción de ruidos existen diversas propuestas, algunas referencias pueden leerse en [Zhang et al. \(2015a\)](#), de estas se desprenden las condiciones que debe cumplir un buen método de remoción de ruidos como son la eficiencia computacional y la calidad del resultado. Este último involucra ciertas características como considerar modelos geométricos de entrada (CAD o provenientes de scanners) con diversas formas de ruido, evitar la contracción de la malla, conservación del volumen y los rasgos finos de la malla en todo nivel, entre otros. La gran mayoría de estos métodos requieren que los usuarios ingresen ciertos parámetros como el número de iteraciones. En tal sentido, recientemente se proponen métodos que involucran la inteligencia artificial para evitar en lo posible la participación del usuario ([Wang et al., 2016](#)).

En el caso de mallas simpliciales, el suavizado es considerado como un proceso de mejora de la malla, los algoritmos de esta categoría son aplicados a todos los vértices de la malla y no solamente a los del borde. Los métodos de mejora de la malla pueden ser clasificados en tres tipos ([Gao et al., 2012](#)). (a) Optimización de topología, de la malla mientras mantiene la posición de los vértices, estas técnicas son conocidas como *swapping* y son utilizadas en la optimización topológica ([Freitag y Ollivier-Gooch, 1997](#); [Klingner y Shewchuk, 2008](#)). (b) Inserción/eliminación de vértices, ([Escobar et al., 2005](#); [Klingner y Shewchuk, 2008](#)). (c) Reubicación de vértices, el cual mueve las coordenadas de los vértices mientras mantiene la conectividad ([Gao et al., 2012](#)). La calidad de la malla, generalmente, se logra al combinar estos tres métodos ([Dassi et al., 2016](#)).

Uno de los métodos más populares, en la categoría de reubicación de vértices, es el Laplaciano, el cual mueve el vértice a la posición del peso promedio de los vértices incidentes ([Field, 1988](#)). Si el vecindario del vértice no es convexo, el suavizado Laplaciano puede llevar a posiciones incorrectas. Existen también métodos de suavizado basados en ángulos, la idea central del método es hacer que cada par de ángulos adyacentes a un vértice sean iguales, este método fue propuesto en su versión 2D ([Zhou y Shimada, 2000](#); [Yu et al., 2008](#)), sin embargo, estos métodos son difíciles de extender para el caso 3D. Otras técnicas de suavizado de vértice son propuestas por [Vartziotis et al. \(2008\)](#) que involucra el estiramiento de vértices de un tetraedro a la vez.

Además de los métodos anteriores que calculan una nueva posición basado en optimización numérica, existen técnicas que optimizan una función que mide la calidad local o global de la malla ([Mezentsev, 2004](#)). En particular *Optimal Delaunay Triangulation (ODT)* ([Chen y Xu, 2004](#)), enfoque que intenta minimizar el error  $\mathcal{L}^1$  entre la función paraboloides y su interpolación lineal a trozos sobre el vecindario de un vértice, además es aplicado para los casos 2D y 3D ([Tournois et al., 2009](#)). El problema con estos algoritmos es que solo podían ser aplicados a vértices interiores, sin embargo en el trabajo de ([Gao et al., 2012](#)) se propuso un método que se aplica a los vértices en el borde, conservando el volumen y sus rasgos finos; este trabajo es importante porque los elementos de mala calidad normalmente se ubican en el borde ([Zhang et al., 2010](#)). De la misma manera [Hu et al. \(2016\)](#) propone el suavizado tanto de vértices interiores como vértices de bordes usando flujos geométricos, conservando el volumen y los rasgos

finos.

Finalmente, entre los trabajos relacionados con el suavizado en mallas simpliciales de múltiples materiales tenemos los trabajos de [Zhang y Qian \(2012\)](#) y [Leng et al. \(2013\)](#) donde se clasifican los vértices en grupos y se aplican métodos de suavizado y remoción de ruidos como los flujos geométricos, asimismo, se optimiza la topología en la malla.

En el contexto de esta tesis de maestría, como primer paso, utilizaremos como referencia los siguientes métodos de suavizado en mallas: [Kuprat et al. \(2001\)](#); [Sousa et al. \(2007\)](#); [Leng et al. \(2013\)](#), debido a que pueden ser aplicados en mallas de 2 y 3 dimensiones conservando el volumen y rasgos finos de la malla original.



# Capítulo 3

## Marco Teórico

En este Capítulo revisamos algunos conceptos que son base para las ideas de este trabajo de tesis de maestría. Comenzaremos definiendo conceptos estándar de la geometría computacional y procesamiento de mallas. Principalmente, definiremos el concepto de malla simplicial en la [Sección 3.1](#), posteriormente presentaremos aspectos relacionados específicamente con las fronteras de mallas simpliciales en la [Sección 3.2](#).

### 3.1. Malla simplicial

Para definir una malla simplicial, debemos hacer definiciones preliminares adaptadas de [Shewchuk et al. \(2016\)](#). Un  $k$ -simplex  $\sigma$  es una envoltura convexa de  $k + 1$  puntos independientes afines. En particular, un 0-simplex es un vértice, un 1-simplex es una *arista*, un 2-simplex es un triángulo, y un 3-simplex es un tetraedro. Un  $k$ -simplex tiene una dimensión  $k$ . Una *cara* de  $\sigma$  es un simplex de todas las dimensiones desde cero (vértices de  $\sigma$ ) hasta  $k$ . En particular las  $(k - 1)$ -caras de  $\sigma$  son llamadas *facetas* de  $\sigma$ ;  $\sigma$  tiene  $k + 1$  facetas. Por ejemplo, las facetas de un tetraedro son sus cuatro triángulos.

Una *malla simplicial*  $M$  en  $\mathbb{R}^d$ , también conocido como *triangulación*, es un conjunto finito de símplexes que satisfacen las dos siguientes restricciones:  $M$  contiene cada cara de cada simplex de  $M$  y para cada dos símplexes  $\sigma, \tau \in M$ , su intersección  $\sigma \cap \tau$  es vacía o una cara de ambos  $\sigma$  y  $\tau$ . La dimensión  $d$  de una malla simplicial está dada por los símplexes de mayor dimensión en  $M$ . Una *célula* es un  $d$ -simplex de  $M$ . Denotamos que  $\sigma$  es  $\tau$ -*incidente* si  $\tau \subset \sigma$ . Sea  $v$  un vértice, los tetraedros  $v$ -incidentes son el conjunto de tetraedros que tienen como vértice a  $v$ .

### 3.1.1. Malla simplicial Delaunay

Sea  $V$  un conjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}^d$ , y sea  $k$  la dimensión de su envoltura afín. Una malla simplicial Delaunay  $M$  es un tipo de malla simplicial donde  $V$  es el conjunto de vértices en  $M$ , y la unión de todos los símlices en  $M$  es la envoltura convexa de  $V$ . Cada  $k$ -simplex es Delaunay. Un  $k$ -simplex  $\sigma$  es Delaunay si existe una  $k$ -circumbola abierta de  $\sigma$  que no contiene un punto de  $V$ . Una  $k$ -circumbola abierta de  $\sigma$ , denotado  $B(c, r)$ , es una bola con centro  $c$  y radio  $r$  que no incluye sus frontera, es decir, es el conjunto de puntos  $B(c, r) = \{p \in \mathbb{R}^k \mid d(p, c) < r\}$ , donde  $d(\cdot, \cdot)$  es la distancia euclidiana, asimismo, cada vértice  $v$  de  $\sigma$  cumple  $d(v, c) = r$ . 5

### 3.1.2. Malla simplicial de múltiples materiales

Es una malla simplicial definida como  $M = \bigcup_{i=0}^{s-1} m^i$ , donde  $s$  es el número de submallas. una submalla es un conjunto de células que no necesariamente conforman un espacio cerrado, puede estar compuesto de varios espacios cerrados, pero constituidos de un solo material. Podemos representar una malla en  $M$  como la función  $i : \sigma \in M \rightarrow \mathbb{N}$  que asigna una etiqueta de material a una célula  $\sigma$ , donde  $\mathbb{N}$  es el conjunto de números naturales con 0 describiendo el fondo.

### 3.1.3. Camino visible

También conocido como *Visibility Walk*, es el algoritmo de recorrido para la ubicación de un punto en una malla  $M$  (Bose y Morin, 1999; Devillers y Hemsley, 2015). La idea es recorrer la malla, desplazándonos entre células vecinos hasta llegar al destino. El algoritmo empieza con la célula que contiene el punto de inicio  $z$ . El desplazamiento se puede dar entre una célula  $t$  y su vecino  $t'$  si y solo si el hiperplano formado por la faceta común entre  $t$  y  $t'$  separa el interior de  $t$  y el punto a ubicar  $q$  (camino visible cuando  $M \in \mathbb{R}^2$ , Figura 3.1). El recorrido no es único debido a que algunas células admiten varios sucesores, en tal caso el sucesor puede elegirse aleatoriamente o utilizando heurísticas. Este método será útil para encontrar un conjunto de células que serán reetiquetadas con el fin de remover una singularidad (Subsección 4.1.2).

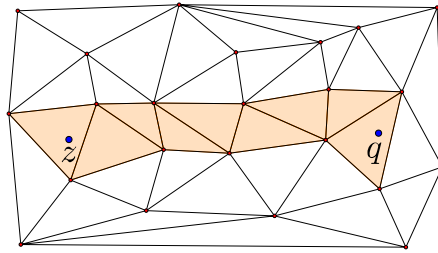


Figura 3.1: Camino visible.

## 3.2. Fronteras en mallas simpliciales

La *frontera*  $\partial\sigma$  de un  $d$ -simplex  $\sigma$  es la unión del conjunto de sus  $d + 1$  facetas: un tetraedro tiene 4 triángulos, un triángulo tiene 3 aristas, una arista tiene 2 vértices, un vértice tiene una frontera vacía. Sea  $m$  un conjunto de células, su frontera  $\partial m$  es el conjunto de facetas, tal que cada faceta es una cara de exactamente una célula, si la faceta está incluida en dos células entonces no pertenece a la frontera. La *clausura*  $c(m)$  es el conjunto de las caras de los símplexes en  $m$ ;  $c(m)$  es una malla simplicial que incluye  $m$ .

### 3.2.1. Singularidades

Un espacio topológico es una  $k$ -variedad si cada punto en el espacio es *regular*, decimos que un punto es regular si tiene una vecindad homeomorfa a una  $k$ -bola abierta (1-bola es una arista y una 2-bola es un disco). Si un vértice no es regular, entonces es *singular*. Una curva es una 1-variedad y una superficie es una 2-variedad. En el caso discreto, la frontera  $\partial m \in \mathbb{R}^d$  es una  $(d - 1)$ -variedad si cada vértice  $v \in c(\partial C)$  es regular en  $\partial m$ . Un vértice de una curva poligonal es regular si pertenece como máximo a dos aristas, de la misma forma, un vértice de una malla superficial de triángulos es regular si todas sus aristas opuestas forman un polígono simple.

### 3.2.2. Test del grafo

Es un método para identificar singularidades en las fronteras  $\partial M$  de una malla simplicial de un solo material, donde  $M \in \mathbb{R}^d$ . Antes presentamos los casos de singularidades en mallas de 2 y 3 dimensiones, [Figura 3.2](#).

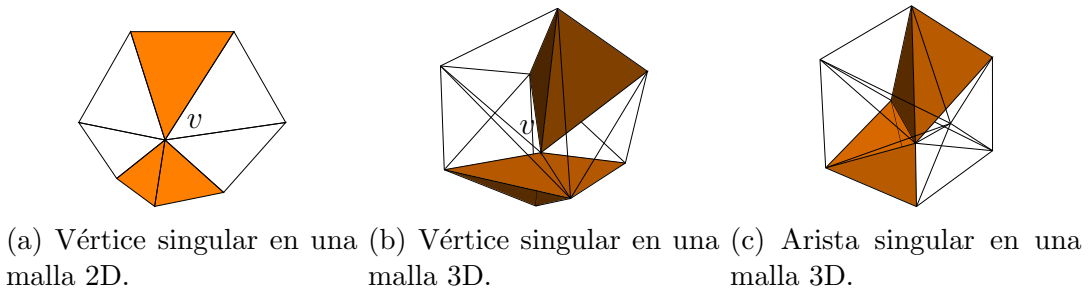


Figura 3.2: Singularidades en mallas 2D y 3D.

En el trabajo de [Lhuillier \(2015\)](#) se propone un método eficiente para determinar si un vértice  $v \in \partial m$  es singular, donde  $m$  es un conjunto de tetraedros o triángulos. Para ello realiza el conteo de componentes conexos en el grafo de adyacencia de las células  $v$ -incidentes.

Sea  $(V, E)$  un grafo con el conjunto de vértices  $V$  y el conjunto de aristas  $E$ . Sea

$V_1, V_2$  una partición de  $V$ . Sea  $F$  el conjunto de todas las aristas en  $E$  tal que cada arista en  $F$  tiene un vértice en  $V_1$  y otro vértice en  $V_2$ . El grafo  $(V, E \setminus F)$  tiene al menos 2 componentes conectados uno en  $V_1$  y otro en  $V_2$ .

Dos símplexes  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son adyacentes si  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  es una faceta (dos tetraedros son adyacentes si su intersección es un triángulo). Sea  $m$  un conjunto de células en  $M$ , y  $g_m$  el grafo de adyacencia de  $m$ , los vértices de  $g_m$  son los  $d$ -símplexes de  $m$ , cada arista de  $g_m$  une dos vértices distintos de  $g_m$  si los dos correspondientes  $d$ -símplexes en  $m$  son adyacentes. Sea  $v$  un vértice en  $c(m)$  y  $g$  el grafo de adyacencia de  $M$ , el grafo de adyacencia de  $m_v$ , abreviado  $g_v$ , es un subgrafo conexo de  $g$ . Cada símplex en  $\partial m$  es finito, la frontera es representada por un corte: las aristas de  $g$  entre  $m$  y  $m^c$  ( $M \setminus m$ ).

**Teorema 3.1.** Sea  $g_v^m$  el grafo generado a partir de  $g_v$ , removiendo las aristas entre un tetraedro de  $m$  y otro de  $m^c$ . El vértice  $v \in c(\partial m)$  es *regular* en  $\partial m$  si y solo si  $g_v^m$  tiene exactamente dos componentes conexos. Estos componentes están en  $m$  y  $m^c$ .

Es preciso señalar que este test solo fue demostrado para mallas simpliciales 3D, además  $m^c$  puede incluir tetraedros infinitos, en la [Figura 3.3](#) además del ejemplo 3D, mostramos su equivalente en 2D, [Figura 3.3a](#). En esta investigación adaptamos el test para identificar singularidades en mallas de múltiples materiales ([Subsección 4.1.1](#)).

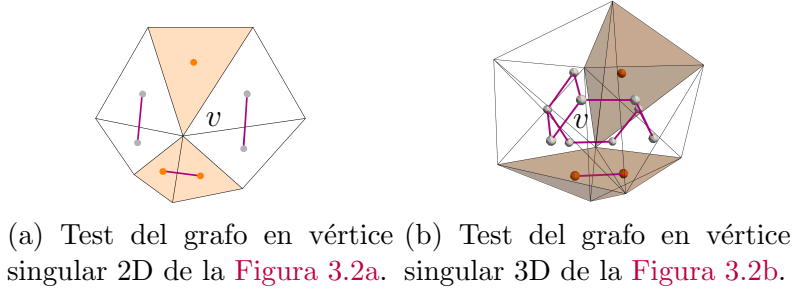


Figura 3.3: Test del grafo en vértices de mallas 2D y 3D.

### 3.2.3. Adición de una célula

[Lhuillier \(2015\)](#) también establece un método para adicionar un tetraedro a un conjunto de tetraedros, conservando la propiedad de variedad en su frontera.

**Teorema 3.2.** Asumimos que  $\partial m$  es una 2-variedad. Sea el tetraedro  $\sigma$  tal que  $\sigma \in DT \setminus m$  y  $f$  el número de triángulos en  $\partial \sigma \cap \partial m$ . Así,  $\partial(m \cup \sigma)$  es una 2-variedad si y solo si una de las siguientes condiciones se cumple:

- Si  $f = 0$  y cada vértice  $v$  de  $\sigma$  satisface  $m_v = \emptyset$ .
- Si  $f = 1$  y el vértice  $v$  de  $\sigma$ , que es opuesto al triángulo de  $\sigma$  en  $\partial m$ , satisface  $m_v = \emptyset$ .
- Si  $f = 2$  y la arista  $e$  que no es parte de ninguno de los 2 triángulos de  $\sigma$  en  $\partial m$ , satisface  $m_e = \emptyset$ .
- Si  $f = 3$ .

- Si  $f = 4$ .

En la [Figura 3.4b](#) se resalta visualmente que elementos del tetraedro se deben verificar al momento de agregar un tetraedro a una región, por ejemplo cuando  $f = 2$ , verificamos las células incidentes a la arista resaltada. De igual manera podemos establecer una forma eficiente para adicionar células en una malla de dimensión 2, [Figura 3.4a](#).

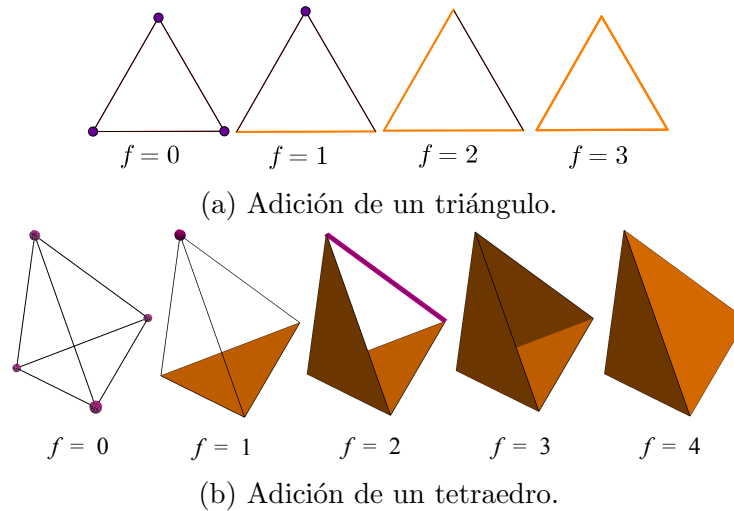


Figura 3.4: Adición de una célula en mallas 2D y 3D.

La manera como es aplicado esta alternativa, se presenta en la [Figura 3.5](#). Tenemos el caso de la [Figura 3.5a](#) donde  $f = 1$  y queremos agregar el triángulo a la región naranja, entonces de acuerdo a la [Figura 3.4a](#) debemos verificar solamente el vértice señalado, en este caso no podemos agregar porque existe un triángulo naranja incidente. En el caso de la [Figura 3.5b](#), si podemos agregar el triángulo y [Figura 3.5c](#) sería el resultado. Este método es aplicado para reparar singularidades en mallas simpliciales de 2 materiales ([Subsección 4.1.2](#)).

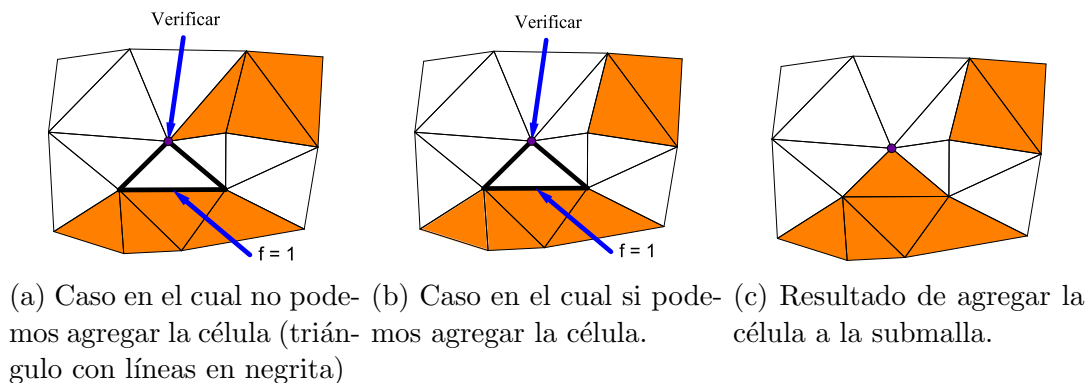


Figura 3.5: Adición de célula.

### 3.2.4. Simulated annealing para reparar singularidades

Simulated annealing es una técnica computacional estocástica de aproximación al mínimo global de una función dada. Este método nos servirá para definir una alternativa de eliminación de singularidades ([Subsección 4.1.4](#)), como parte de nuestra propuesta. Seguidamente describiremos esta técnica.

Dada una función  $\varepsilon : Z \rightarrow \mathbb{R}$ , a cada estado valido  $z_t \in Z$  le corresponde un número real. Para lograr esta aproximación, es necesario definir un conjunto de estados vecinos  $Z_t$  para cada  $z_t$ . El proceso comienza con un estado arbitrario  $z_t$ , luego, seleccionamos aleatoriamente uno de sus estados vecinos  $z_u \in Z_t$ , para saber si  $z_u$  reemplaza el actual estado, es necesario hacer un experimento estocástico entre la probabilidad

$$p(z_t, z_u) = e^{-\frac{\varepsilon(z_u) - \varepsilon(z_t)}{T}} \quad (3.1)$$

(donde la temperatura  $T > 0$ ) y un número aleatorio; si  $\varepsilon(z_u) < \varepsilon(z_t)$ , entonces  $p(z_t, z_u)$  es mayor que 1,  $z_u$  reemplaza el actual estado sin hacer el experimento, la posibilidad de aceptar estados inferiores disminuye igual de lento como  $T$  disminuye, si  $T$  tiende a 0 entonces  $\lim_{T \rightarrow 0} e^{-\frac{\varepsilon(z_u) - \varepsilon(z_t)}{T}} = 0$  y no hay posibilidad de aceptar estados inferiores ([Otten y van Ginneken, 2012](#)).

[Wagner et al. \(2003\)](#) utiliza esta técnica para reparar mallas superficiales triangulares con singularidades. Primero, realiza el preprocesamiento de la malla, removiendo triángulos que ocasionan las singularidades y cerrando si es posible los huecos generados. El proceso empieza con la definición de un conjunto de estados, un conjunto de estados vecinos y los costos de función. Cada estado es considerado una malla válida, y un estado vecino es la modificación de una malla válida. Los costos de función son el número de espacios vacíos (aristas abiertas) y la curvatura media discreta de toda la triangulación dividido por la suma de las distancias de aristas. Después de cierto número de iteraciones, en el mejor caso, se reparan todas las singularidades conservando la forma de la malla original sin ocasionar huecos.

### 3.2.5. Curvatura discreta

La propiedad de variedad en las fronteras  $\partial M$  permite realizar el cálculo de muchas propiedades en las curvas y superficies, en este caso, presentaremos la curvatura en su versión discreta. Estas definiciones serán aplicadas como criterios para reparar singularidades en parte del presente trabajo ([Subsección 4.1.2](#)).

#### 3.2.5.1. Curvatura en una curva plana discreta

La curvatura es una propiedad importante de una curva, indica la cantidad por la cual un objeto geométrico dentro de un espacio euclidiano se desvía de ser lineal. El problema es la transición hacia lo discreto, siguiendo un concepto u otro obtenemos

diferentes definiciones para curvatura de una curva plana discreta, que no son equivalentes entre ellas. Estas definiciones no cumplen todas las propiedades que en el caso continuo. Una de las definiciones que satisface el teorema del número de vueltas, para el caso de una curva cerrada es la siguiente (Saba, 2014):

$$\kappa = \frac{2\theta_i}{|e_{i-1}| + |e_{i+1}|} \quad (3.2)$$

Donde  $e_{i+1} = v_{i+1} - v_i$  y  $\theta_i$  es el ángulo con signo entre los vectores  $e_{i+1}$  y  $e_{i-1}$  Figura 3.6a. El signo del ángulo, y por tanto de la curvatura, indica si la curva se desvía a la derecha o izquierda, según su dirección.

### 3.2.5.2. Curvatura media en una malla superficial triangular

La curvatura media es una propiedad de una superficie continua en  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $p$  un punto en la superficie  $S$ , cada plano que contiene  $p$  y su normal con respecto a  $S$  corta a  $S$  en una curva, eligiendo una normal obtenemos la curvatura con signo de esta curva o también conocida como curvatura normal. La curvatura media en  $p$  es el promedio de las curvaturas normales. Si tenemos un punto en un plano la curvatura media es cero. La curvatura media con signo positivo indica que la superficies se desvía en dirección a la normal.

Al igual que la curvatura en 2D, la transición hacia lo discreto presenta inconvenientes y existen muchas definiciones que tratan de cumplir todas las propiedades en comparación con el caso continuo. A continuación presentamos la curvatura media según Meyer et al. (2003):

$$s(v_i) = \frac{1}{2A(v_i)} \sum_{j \in N_1(i)} (\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij}))(v_i - v_j) \quad (3.3)$$

$A(v_i)$  es el área mixta en la Figura 3.6b (Meyer et al., 2003), y  $N_1(i)$  son los vértices vecinos de 1-anillo.  $s(v_i)$  es el operador de curvatura media normal, para obtener la curvatura media con signo,  $K$ , hacemos:

$$H = \text{sign}(\langle s(v_i), n \rangle) \frac{\|s(v_i)\|}{2} \quad (3.4)$$

Donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa el producto interno,  $\|\cdot\|$  es la norma euclidiana y  $n$  es la normal fijada.

### 3.2.6. Suavizado conservando el volumen

Estos métodos de suavizado son aplicadas en curvas poligonales y mallas superficiales triangulares con la propiedad de variedad, consiste en la reubicación de sus

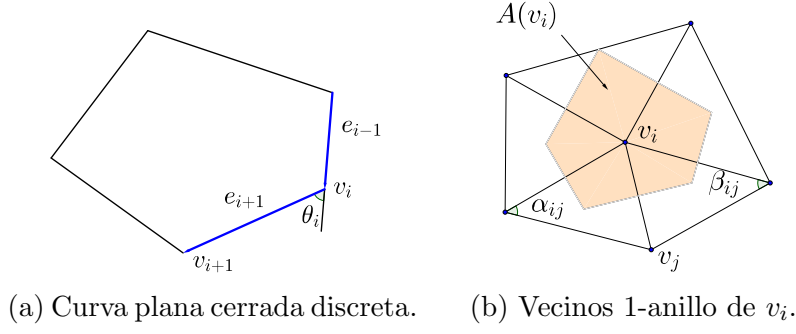


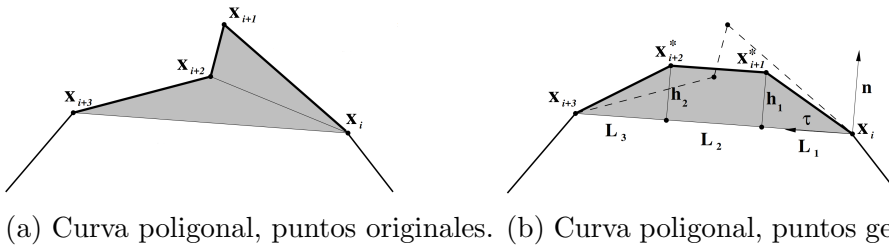
Figura 3.6: Curvatura discreta.

vértices conservando el volumen, área en el caso 2D, (Kuprat et al., 2001; Sousa et al., 2007). A continuación presentamos uno de los métodos denominado **TSUR** (Sousa et al., 2007) en sus versiones 2D y 3D, estos son empleados para el suavizado en las fronteras de dos submallas (Subsección 4.2.2).

### 3.2.6.1. TSUR-2D

Este algoritmo considera cuatro vértices consecutivos  $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$  y  $x_{i+3}$  en una curva poligonal, Figura 3.7a, con estos vértices se origina un trapezoide, se calcula su área con signo y se crea un nuevo trapezoide con el mismo área, pero moviendo el segundo y tercer vértice de tal manera que  $L_1 = L_2 = L_3 = L$ ,  $h_1 = h_2 = h$ , Figura 3.7b. Si  $A$  es el área entonces  $h = A/2L$ ,  $\tau = \frac{x_{i+3}-x_i}{|x_{i+3}-x_i|}$  es el vector unitario de  $x_{i+3} - x_i$  y  $\mathbf{n}$  su normal unitaria hacia fuera, tenemos que  $x_{i+1}^* = x_i + L\tau + h\mathbf{n}$  y  $x_{i+2}^* = x_i + 2L\tau + h\mathbf{n}$ .

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= x_i + L\tau + h\mathbf{n} \\ x_{i+2}^* &= x_i + 2L\tau + h\mathbf{n} \end{aligned} \tag{3.5}$$


 Figura 3.7: Método **TSUR**-2D (Sousa et al., 2007).

### 3.2.6.2. TSUR-3D

Sea el vértice  $v$  y su correspondiente estrella conformado por los vértices  $x_i$ , donde  $i = 0, 1, \dots, n$  ( $x_{n+1} = x_0$ ), Figura 3.8a,  $p$  es el promedio de los vértices en su estrella,  $\mathbf{n}$



la normal unitaria en  $v$  calculado mediante el promedio de las normales en los triángulos  $(x_i, p, x_{i+1})$ .

La primera etapa, [Figura 3.8a](#), Equilibrio del vértice, es aplicado a cada vértice y consiste en mover  $v$  a la posición calculada al mover  $p$  en la dirección de  $\mathbf{n}$ , es decir  $v_{nuevo} = p + h\mathbf{n}$ , de tal manera que el volumen con signo  $V$  del poliedro  $(v, x_0, x_1, \dots, x_n, p)$  se conserve, para ello calculamos  $h = V/V_1$ , donde  $v_1$  es el volumen del poliedro unitario  $(p + \mathbf{n}, x_0, x_1, \dots, x_n, p)$

La segunda etapa, [Figura 3.8b](#), Eliminación de ondulaciones, es aplicado a cada arista con vértices  $v_1$  y  $v_2$ , primero se calculan sus normales  $\mathbf{n}_1$  y  $\mathbf{n}_2$  al igual que la primera etapa, obtenemos el nuevo  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2|}$  y sea  $m$  el promedio de  $v_1$  y  $v_2$ . Determinamos las alturas  $h_1 = \langle v_1 - m, \mathbf{n} \rangle$  y  $h_2 = \langle v_2 - m, \mathbf{n} \rangle$  en la dirección de  $\mathbf{n}$ , además calculamos los puntos  $p_1 = v_1 - h_1\mathbf{n}$  y  $p_2 = v_2 - h_2\mathbf{n}$ , tenemos que calcular una nueva altura en la dirección de  $\mathbf{n}$  de tal manera que el volumen sea preservado, así tenemos:

$$h = \frac{V_1 + V_2}{V_1/h_1 + V_2/h_2} \quad (3.6)$$

Donde  $V_1$  y  $V_2$  son los volúmenes con signo de los poliedros  $(v_1, x_{1,0}, x_{1,1}, \dots, x_{1,n})$  y  $(v_2, x_{2,0}, x_{2,1}, \dots, x_{2,m})$  respectivamente, finalmente las nuevas posiciones están dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} v_1^* &= p_1 + h\mathbf{n} \\ v_2^* &= p_2 + h\mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.7)$$

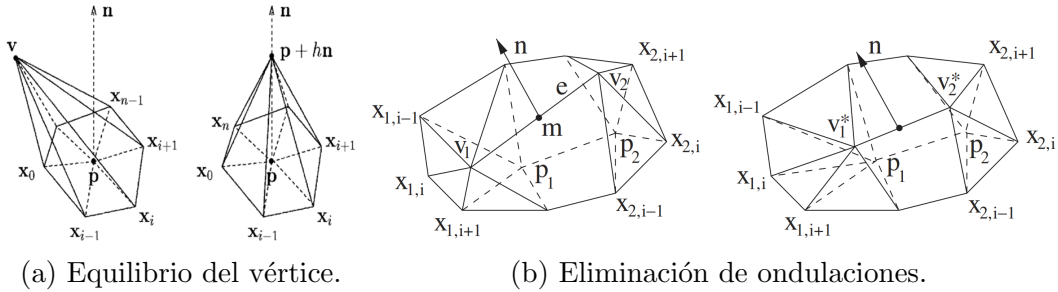


Figura 3.8: Método [TSUR-3D](#) ([Sousa et al., 2007](#)).



# Capítulo 4

## Propuesta

En este Capítulo se detalla la propuesta, de esta tesis de maestría, para reparar singularidades y suavizar las fronteras en mallas simpliciales de múltiples materiales en 2 y 3 dimensiones, en ambos casos, nuestros métodos son aplicados siguiendo casi el mismo enfoque. El resultado es una malla simplicial de múltiple materiales con fronteras libres de singularidades y suavizadas.

En la [Figura 4.1](#) observamos la representación del proceso de nuestra propuesta que consiste en dos etapas principales, descritas a continuación.

**Reparación de singularidades** ([Sección 4.1](#)). El proceso comienza con la identificación de singularidades ([Subsección 4.1.1](#)). Luego, para reparar estas singularidades utilizamos tres herramientas. La primera herramienta  $R_D$  ([Subsección 4.1.2](#)) utiliza un conjunto de criterios determinísticos para cambiar la etiqueta de una célula. La segunda herramienta  $I$  ([Subsección 4.1.3](#)) usa la inserción de puntos. Finalmente, la tercera herramienta  $R_{SA}$  ([Subsección 4.1.4](#)) realiza el reetiquetado empleando simulated annealing, es decir, está basado en criterios probabilísticos. Con la combinación de estas herramientas proponemos tres algoritmos para reparar singularidades ([Subsección 4.1.5](#)) los cuales pueden ser aplicados según el objetivo del contexto.

**Suavizado de fronteras** ([Sección 4.2](#)). En esta segunda etapa suponemos la entrada es una malla simplicial de múltiples materiales libre de singularidades. Para suavizar sus fronteras hacemos uso de dos métodos. El primero es el reetiquetado basado en curvaturas discretas  $S_R$  ([Subsección 4.2.1](#)). Este método reetiqueta células con la finalidad de suavizar las fronteras entre las submallas y evitar la generación de nuevas singularidades. El segundo método es la reubicación de vértices  $S_V$  ([Subsección 4.2.2](#)), basado en el movimiento de vértices, este método ofrece mejores resultados que el primero, pero es aplicado a ciertos vértices de frontera y además puede generar un cambio de orientación en las células.

Seguidamente detallamos las dos principales etapas de nuestra propuesta.

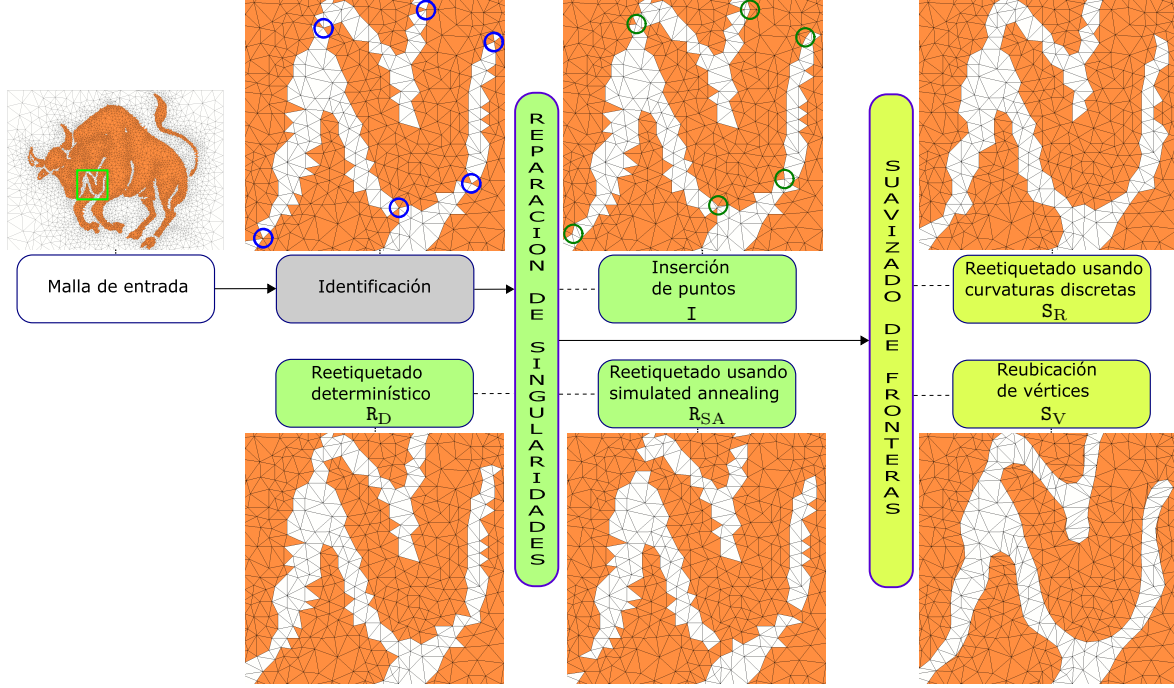


Figura 4.1: Etapas de la propuesta.

## 4.1. Reparación de singularidades

Sea una malla simplicial de múltiples materiales  $M = \bigcup_{i=0}^{s-1} m^i$  con  $s$  submallas como entrada, donde  $i$  representa la etiqueta del material. La Figura 4.2 muestra el ejemplo de una malla simplicial de 2 materiales, además, se detalla los términos que utilizaremos en nuestra propuesta. Adicionalmente, todas las células infinitas vinculadas al vértice infinito, constituyen una submalla abstracta  $m^{-1}$ , donde  $-1$  es la etiqueta de su material. De esta forma, la Figura 4.2 es en sí, una malla abstracta definida por  $M^{-1} = M \cup m^{-1}$  (Shewchuk et al., 2016). Este es el tipo de malla que utilizaremos en el resto de nuestra propuesta.

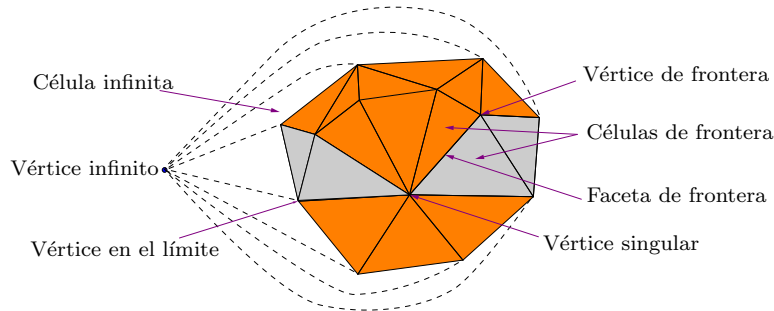


Figura 4.2: Malla abstracta y términos usuales.

Las fronteras de las submallas son denotadas por  $\partial m^i$ , se asumen que no son  $(d-1)$ -variedades, entonces poseen  $k$  vértices singulares. A continuación, presentamos el proceso para la identificación de singularidades.

### 4.1.1. Identificación de singularidades

Sea  $L$  un conjunto de células, luego  $L_v$  son todas las células en  $L$  que tienen a  $v$  como vértice. Consideramos  $a_v$  como el grafo de adyacencia de  $M_v^{-1}$  (Figura 4.3a). Luego, para encontrar vértices singulares definimos el grafo  $g_v$ , de manera similar al test del grafo (Subsección 3.2.2), éste se obtiene removiendo las aristas de  $a_v$  que representan la adyacencia entre una célula en  $m_v^i$  y otra en  $m_v^j$ , donde  $i \neq j$  (Figura 4.3b). Un componente es el conjunto de células representados por un subgrafo en  $g_v$ , donde  $m_v^i$  puede tener varios componentes. Clasificamos  $m_v^i$  de acuerdo con su número de componentes, de la siguiente forma:

- Triple componente o más,  $m_v^i$  tiene tres o más componentes.  $v$  es singular en  $\partial m^i$  (Figura 4.3c).
- Doble componente,  $m_v^i$  tiene dos componentes.  $v$  es singular en  $\partial m^i$  (Figura 4.3d).
- Único componente,  $m_v^i$  tiene un solo componente. Si  $d = 2$ ,  $v$  es siempre regular en  $\partial m^i$ , por otro lado, cuando  $d = 3$ ,  $v$  es regular en  $\partial m^i$  si el conjunto de células  $M_v^{-1} \setminus m_v^i$  tiene un camino en  $a_v$ , de otro modo  $v$  es singular en  $\partial m^i$  (Figura 4.3e).

$g_v$  también funciona para vértices en el límite, aquellos que forman una arista con el vértice infinito (Figura 4.2). En el caso 3D, una arista singular son dos vértices singulares, entonces decimos que localizar y reparar vértices singulares, también repara las aristas singulares. En ambas dimensiones,  $v$  puede ser singular con respecto a diferentes submallas. Luego de haber identificado los vértices singulares, pasamos a proponer las herramientas para eliminar estas singularidades, en las siguientes secciones.

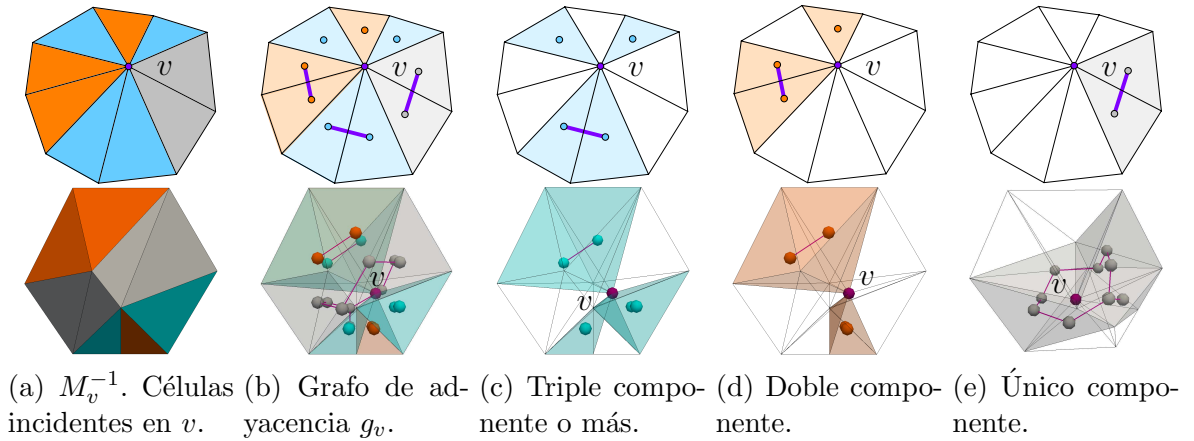


Figura 4.3: Identificación de vértices singulares cuando  $d = 2$  (arriba) y  $d = 3$  (abajo).

### 4.1.2. Reetiquetado determinístico ( $R_D$ )

Para reparar un vértice singular  $v$  en la frontera  $\partial m^i$ , reetiquetamos las células alrededor de  $v$  de tal forma que  $m_v^i$  sea un único componente y  $v$  sea regular en  $\partial m^i$ . Luego, para cada material donde  $v$  es singular, realizamos los siguientes pasos.

#### 4.1.2.1. Ordenación de componentes

Primero, obtenemos el material  $i$  donde  $v$  es singular, denotamos un componente  $m_{v,c}^i$ , donde  $c = 1, 2, \dots, q$  y  $q$  es el número de componentes. Por ejemplo, en la [Figura 4.4a](#),  $q = 2$ . Guardamos cada componente  $m_{v,c}^i$  en un vector denominado  $P$ , ascendentemente ordenado de acuerdo con el criterio descrito por la [Ecuación 4.1](#).

$$c_1 = E(m_{v,c}^i) \quad (4.1)$$

Donde  $E$  es la mayor distancia de una arista en  $m_{v,c}^i$ . Este criterio funciona para el contexto de nuestras mallas debido a la irregularidad de las células, de otro modo, si son de tamaño regular (triángulos equiláteros o tetraedros regulares) podemos utilizar el área/volumen o el número de vueltas ([Jacobson et al., 2013](#)) en las curvas/superficies discretas según la dimensión. En la [Figura 4.4a](#),  $P$  quedaría ordenado de la siguiente manera  $P = \{m_{v,1}^i, m_{v,2}^i\}$ . Este orden es la base para aplicar el criterio de erosión o dilatación, descrito a continuación.

#### 4.1.2.2. Criterio de erosión o dilatación

Para decidir si  $m_v^i$  es erosionado o dilatado, realizamos para cada componente  $m_{v,c}^i$ , el cálculo de  $R_v$  (curvatura discreta con signo de una curva plana cuando  $d = 2$  y curvatura media con signo en una malla superficial de triángulos cuando  $d = 3$ , [Subsección 3.2.5](#)) del vértice singular  $v$  con respecto a  $\partial m_{v,c}^i$ . Además, calculamos  $sum_R = \sum R_w$  donde  $w$  es un vértice regular en  $\partial m^i$  y se cumple  $w \in m_{v,c}^i$  y  $w \neq v$ . Luego,  $m_v^i$  es dilatado si al menos la mitad de los elementos,  $\lfloor (q+1)/2 \rfloor$ , en  $P$  cumplen con  $c_2 = 1$ , donde  $c_2$  se define en la [Ecuación 4.2](#), de otro modo es erosionado.

$$c_2 = \begin{cases} 1 & \text{if } (R_v)(sum_R) \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (4.2)$$

A continuación describimos las operaciones erosión y dilatación.

- **Erosión.** Recorremos  $P$  para reetiquetar hasta el penúltimo componente, es decir,  $m_v^i$  se convierte en un único componente. Para obtener la nueva etiqueta del material, medimos las facetas de frontera (distancia o área) en  $m_{v,c}^i$  e identificamos la etiqueta del material con la cual  $m_{v,c}^i$  comparte mayor vecindad o existe mayor intersección. Es preciso señalar que cuando  $d = 3$  un único componente no implica que  $v$  es regular en  $\partial m^i$ . En la [Figura 4.4b](#)  $m_v^i$  es erosionado, porque  $c_2 = 0$  para  $m_{v,1}^i$  y  $m_{v,2}^i$ , entonces la malla resultante sería la [Figura 4.4c](#).
- **Dilatación.** Tomamos los componentes  $c$  y  $l$  ( $c \neq l$ ) de  $P$  y seleccionamos un punto  $y$  en  $m_{v,c}^i$  (por ejemplo, el centroide de una faceta de frontera) y otro  $z$  en  $m_{v,l}^i$ , luego, determinamos un camino de células adyacentes a través del método camino visible ([Subsección 3.1.3](#)) entre  $y$  y  $z$ . Reetiquetamos células en el camino con  $i$ , si aún existe mas de un componente, repetimos el proceso hasta que  $m_v^i$

sea un único componente. Para el caso 3D, si  $m_v^i$  es único componente, pero  $v$  es singular en  $\partial m^i$ , es dilatado mediante la erosión del conjunto de células  $M_v \setminus m_v^i$  usando  $i$  como la nueva etiqueta. La Figura 4.4d presenta un vértice con dos componentes, donde  $c_2 = 1$  para  $m_{v,1}^i$ , en este caso dilatamos  $m_v^i$ . Seguidamente calculamos las células que conforman *visibility walk*, las cuales están resaltadas en la Figura 4.4e. Finalmente el resultado final se observa en la Figura 4.4f.

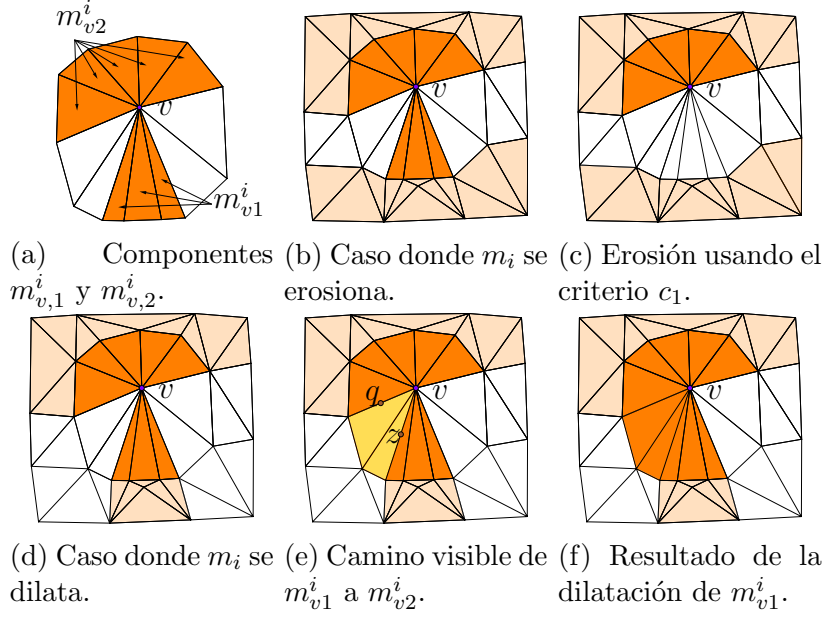


Figura 4.4: Reetiquetado para reparar singularidades.

Al aplicar esta herramienta cambiamos la etiqueta de algunas células incidentes al vértice singular. Posteriormente, actualizamos los vértices vecinos donde podemos detectar nuevas singularidades y el proceso puede convertirse en un bucle. Para evitar ello, marcamos las células que han sido previamente reetiquetadas.

### 4.1.3. Inserción de puntos (I)

Esta herramienta es aplicada en una malla simplicial Delaunay, es decir, una malla que cumple las siguientes condiciones. Las células en  $M$  están incluidas en la envoltura convexa de  $V$ , y la circumbola ( $d$ -bola cuyos bordes pasan a través de cada vértice de la célula) de cada célula no contiene un vértice en su interior.

Este proceso consiste en seleccionar un componente  $m_{v,c}^i$ , para erosionar  $m_v^i$  a través de la inserción del punto  $w$ . Al final, las células de  $m_{v,c}^i$  son eliminadas de tal manera que nuevas células con  $w$  como vértice son creadas, para  $d = 2$  suponemos  $abv$  es un triángulo en  $m_{v,c}^i$  con vértices  $a$ ,  $b$  y  $v$ ; después de insertar  $w$  se crea un triángulo  $abw$  del mismo material, lo mismo pasa con todos los triángulos en  $m_{v,c}^i$ . Además, después de la inserción, las células de otros componentes  $m_{v,l}^i$ , donde  $c \neq l$ , y las células alrededor de  $M_v$  no son afectadas por la inserción. Intentamos ubicar una

posición en el espacio para insertar un punto  $w$  y cumplir las condiciones previas, para ello, realizamos lo siguiente.

- **Intersección de circumbolas.** Nuestro objetivo es que las células en  $m_{v,c}^i$  sean destruidas, entonces el punto a insertar  $w$  debe estar dentro de las circumbolas de las células en  $m_{v,c}^i$ , es decir,  $w$  debe estar en la intersección de las circumbolas. Ver [Figura 4.5a](#).
- **Preservación de células.** Para no afectar las células de otros componentes  $m_{v,l}^i$  ni las células afuera de  $M_v$ , verificamos que  $w$  no se encuentre en el interior de sus circumbolas. Si  $w$  satisface esta última condición, podemos erosionar  $m_{v,c}^i$ . Ver [Figura 4.5b](#).
- **Inserción del punto.** Al insertar  $w$  eliminamos las células cuyas circumbolas fueron afectadas. Esto forma una cavidad como en la [Figura 4.5c](#), debido a que  $M$  es Delaunay, reconstruimos la cavidad de la siguiente forma. En el caso 2D existe una nueva arista  $aw$  por cada vértice  $a$  de la cavidad poligonal, en el caso 3D, existe un nuevo triángulo  $abw$  para cada arista  $ab$  en la cavidad poliedral ([Bowyer, 1981](#); [Watson, 1981](#)); esto nos permite recuperar las células de  $m_{v,c}^i$  donde  $v$  es reemplazado por  $w$  como lo mostramos en la [Figura 4.5d](#).

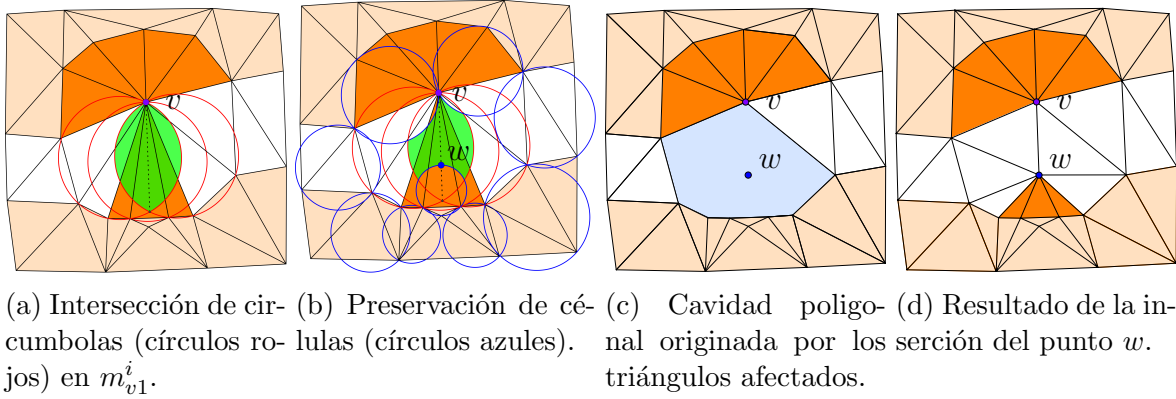
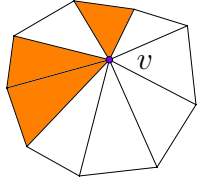


Figura 4.5: Inserción de un punto.

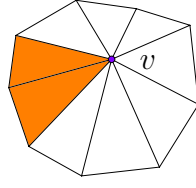
A continuación explicamos los casos donde son aplicadas las herramientas **R<sub>D</sub>** e **I**. En la [Figura 4.6](#) se observan las alternativas para reparar un vértice singular en una malla de dimensión 2. Cuando la submalla  $m_v^i$  posee dos componentes ([Figura 4.6a](#)) se puede reparar de 4 diferentes formas detalladas en las Figuras [4.6b](#), [4.6c](#), [4.6d](#) y [4.6e](#). El caso especial de la [Figura 4.6e](#) es logrado erosionando el camino visible de las células adyacentes (Ver [Subsubsección 4.1.2.2](#)) a través de la inserción de un punto. Si  $m_v^i$  es de triple componente o más ([Figura 4.6f](#)), se puede obtener como resultado la erosión de  $m_v^i$  ([Figura 4.6g](#)) o su dilatación ([Figura 4.6h](#)).

De la misma forma, en la [Figura 4.7](#) se detallan las alternativas para reparar un vértice singular en una malla de dimensión 3. Si  $m_v^i$  posee un único componente ([Figura 4.7a](#)) las alternativas para su reparación se muestran en las Figuras [4.7b](#) y [4.7c](#).

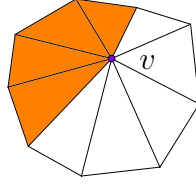




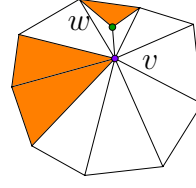
(a) Doble compo-  
nente,  $v$  es singu-  
lar.



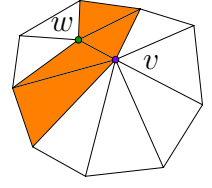
(b) Erosión,  $v$  es  
regular.



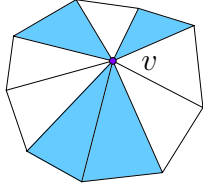
(c) Dilatación,  $v$   
es regular.



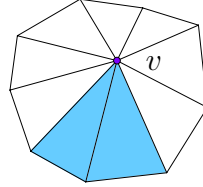
(d) Erosión con  
inserción de  $w$ ,  $v$   
y  $w$  son regulares.



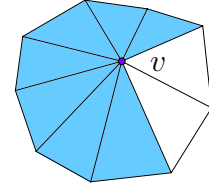
(e) Dilatación con  
inserción de  $w$ ,  $v$   
y  $w$  son regulares.



(f) Triple componente,  
 $v$  es singular.



(g) Erosión,  $v$  es regu-  
lar.



(h) Dilatación,  $v$  es re-  
gular.

Figura 4.6: Casos de vértices singulares 2D y alternativas para repararlos.

En el caso de la [Figura 4.7c](#), la malla se produce al dilatar el componente erosionando uno de los componentes en  $M_v \setminus m_v^i$  a través de la inserción de un punto. Continuando, cuando  $m_v^i$  es de doble componente ([Figura 4.7d](#)), se puede obtener como resultado alguna de las Figuras [4.7e](#), [4.7f](#) o [4.7g](#). Por último, cuando  $m_v^i$  es de triple componente o más ([Figura 4.7h](#)), puede producir la malla de la [Figura 4.7i](#) o [Figura 4.7j](#).

Tal como sucede con  $R_D$ , al finalizar la inserción actualizamos la información sobre los vértices vecinos, y detectamos los nuevos vértices singulares. Aunque no existe garantía matemática que la inserción produzca nuevas singularidades, en los resultados comprobamos que en mallas 2D y en vértices donde las células incidentes forman parte de 2 submallas no se produce nuevas singularidades. Además, no siempre se puede encontrar la posición correcta del nuevo punto a insertar  $w$ , de tal manera, que cumpla con las etapas de intersección de circumbolas y la preservación de células explicadas previamente. En consecuencia, proponemos una última herramienta para tratar con los casos que no pueden ser resueltos por  $R_D$  e  $I$ , detallada abajo.

#### 4.1.4. Reetiquetado usando simulated annealing ( $R_{SA}$ )

Esta herramienta utiliza el proceso de simulated annealing ([Subsección 3.2.4](#)) adaptado a nuestro contexto, una malla de entrada  $M^{-1}$ . Primero, definimos una célula de relleno como un triángulo o tetraedro que nos permite reparar vértices singulares en  $\partial m^i$ , donde  $0 \leq i \leq s - 1$ , ellos componen la submalla de relleno  $m^s$  donde  $s$  es la etiqueta de su material, si  $\sigma_i$  es una célula en  $m^i$  puede convertirse en una célula de relleno  $\sigma_s$  mediante el cambio de etiqueta, nuestro objetivo es que todas las fronteras  $\partial m_i$  sean  $(d - 1)$ -variedad, aunque  $M^{-1}$  puede contener células de relleno en el peor caso. Según el proceso de simulated annealing definimos un conjunto de estados, un conjunto de estados vecinos y un costo de función.

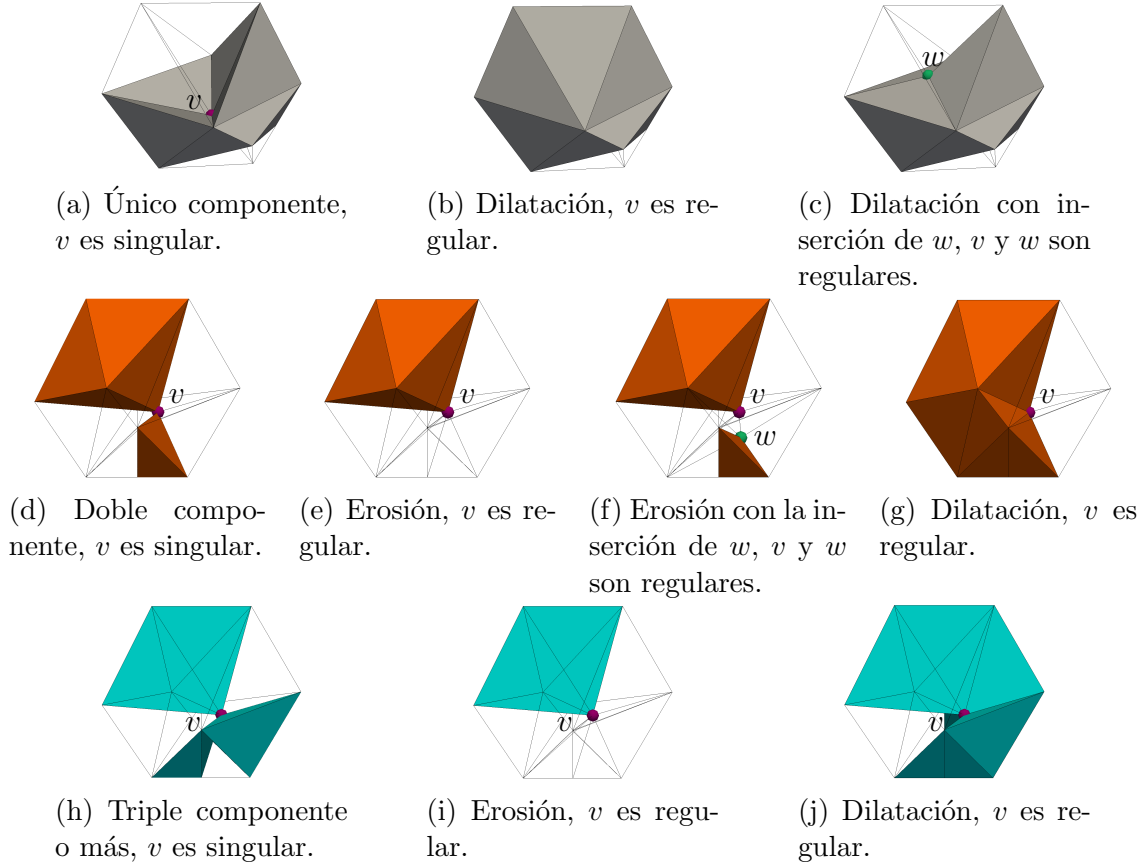


Figura 4.7: Casos de vértices singulares 3D y alternativas para repararlos.

#### 4.1.4.1. Conjunto de estados

El conjunto de estados  $Z$  son todas las mallas válidas  $M_t$ , decimos que  $M_t$  es válida si las fronteras  $\partial m^i$  son  $(d - 1)$ -variedad y puede contener células de relleno en el peor de los casos, sin embargo,  $\partial m^s$  no es necesariamente una  $(d - 1)$ -variedad. La malla original  $M^{-1}$  no es un estado válido, para que lo sea, tiene que pasar por el proceso de Reparación aleatoria de singularidades, explicado posteriormente.

#### 4.1.4.2. Conjunto de estados vecinos

El conjunto de estados vecinos  $Z_t$  de una malla válida  $M_t \in Z$ , son todas las mallas que pueden ser derivadas de  $M_t$  al pasar por las siguientes etapas:

- **Asignación aleatoria de etiquetas.** Consiste en obtener la nueva etiqueta que será asignada a cada célula  $\sigma_s$  de relleno. Entonces, definimos la probabilidad  $x_1$ , si un número aleatorio entre 0 y 1 es menor que  $x_1$ , entonces  $\sigma_s$  toma su etiqueta original, de otro modo, toma la etiqueta del material con la cual comparte mayor vecindad. Al final de este proceso, recuperamos los vértices singulares, si existen.

- **Reparación aleatoria.** Para cada vértice singular recuperado de la etapa anterior, verificamos si puede ser reparado sin generar nuevas singularidades. Entonces, definimos una probabilidad  $x_2$  entre 0 y 1, luego, generamos un número aleatorio, si este número es menor que  $x_2$  erosionamos, de otro modo dilatamos (ver detalles en la [Subsección 4.1.2](#)). Si se generan nuevas singularidades, utilizamos el proceso de la erosión, donde la nueva etiqueta es  $s$ , es decir, se crean células de relleno de tal manera que  $M_t$  sea válido.

Para detallar, en el caso de una malla de dimensión 2, si  $m_v^i$  es de doble componente o triple componente o más, se erosionan usando la nueva etiqueta  $s$ . En el caso de doble componente ([Figura 4.8a](#)) el resultado se muestra en la [Figura 4.8b](#). En mallas de dimensión 3, si  $m_v^i$  es de único componente, doble componente o triple componente o más, también se erosionan creando células de relleno. Para el caso de único componente ([Figura 4.8e](#)) y doble componente ([Figura 4.8c](#)) los resultados se muestran en las Figuras [4.8f](#) y [4.8d](#). En el caso del único componente erosionamos mediante la dilatación de componentes vecinos. Crear células de relleno, ocasionalmente genera nuevas singularidades, si eso sucede, continuamos creando células de relleno hasta obtener un estado válido.

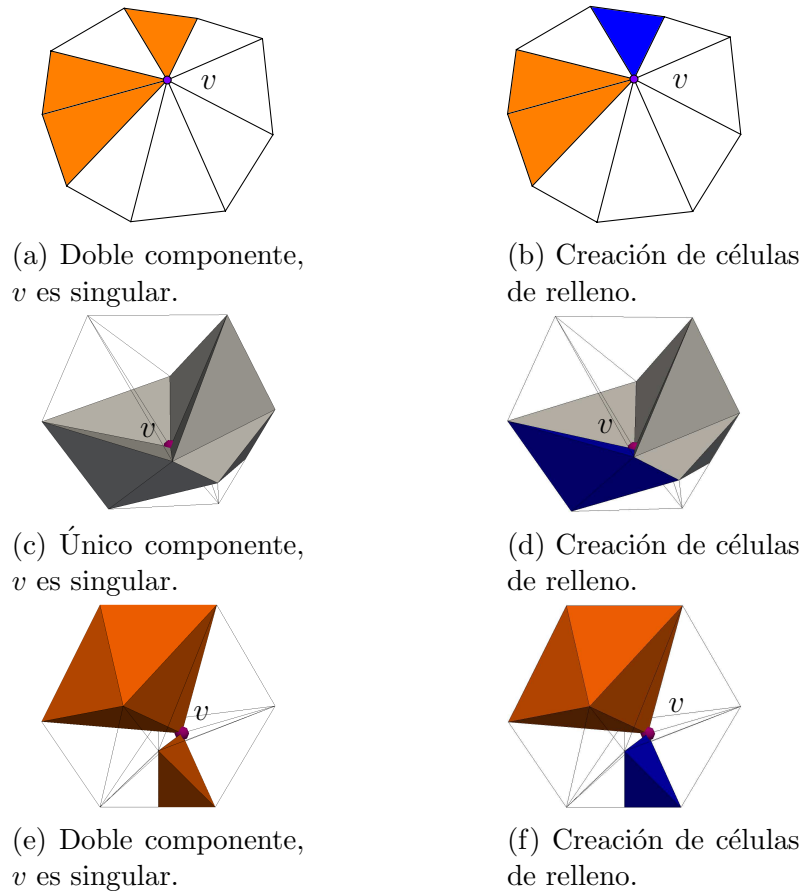


Figura 4.8: Reparación aleatoria. Creación de células de relleno en mallas 2D y 3D. Luego de esta etapa la malla es considerada válida.

**4.1.4.3. Costo de función**

Nuestro objetivo es generar fronteras que sean  $(d - 1)$ -variedad sin crear células de relleno, entonces nuestro costo de función es definido como:

$$\varepsilon(M_t) = \# \text{ células de relleno en } m^s; m^s \in M_t \quad (4.3)$$

Usualmente, en simulated annealing no sabemos si el mínimo global es logrado en una cierta iteración. Para nuestro enfoque, sabemos que el mínimo global de  $\varepsilon$  es 0.

**4.1.4.4. Una etapa en simulated annealing**

Una etapa en el proceso de simulated annealing, en este contexto, se realiza de la siguiente manera, sea  $M_t$  la actual malla válida. Primero la malla vecina  $M_u \in Z_t$  es elegida aleatoriamente. Luego, el experimento estocástico es realizado contra la probabilidad:

$$p(M_t, M_u) = e^{-\frac{\varepsilon(M_u) - \varepsilon(M_t)}{T}} \quad (4.4)$$

Si el experimento es exitoso, la transición de  $M_t$  a  $M_u$  es aceptada y  $M_u$  reemplaza la actual malla, de otra manera mantenemos  $M_t$ .

**4.1.4.5. Proceso completo de simulated annealing**

Consiste en  $h$  etapas, éstas difieren entre ellas por el descenso de la temperatura  $T$ , la cual controla la probabilidad de elegir estados inferiores. La temperatura inicial es  $T_1$  y la temperatura  $T_r$  de la etapa  $r$  esta dada por:

$$T_r = T_1 * \alpha^{r-1} \quad (4.5)$$

Donde  $\alpha$  es el factor que controla cuan rápido la temperatura cambiará en cada etapa. La malla de entrada tiene un número de singularidades  $k$ ,  $T_1$  debe ser del mismo orden que el número inicial de células de relleno para asegurar que los cambios iniciales sean aceptados, además  $\alpha = 0,9$ , para todos los experimentos en mallas 2D y 3D trabajamos con  $x_2 = x_1 = 0,7$ , sin embargo, el algoritmo termina en menos etapas para todos los casos.

**4.1.5. Algoritmos para reparar singularidades**

El reetiquetado implica un costo computacional bajo y no cambia la geometría ni topología de la malla, pero no existe garantías que solucionará todas las singularidades. La inserción de un punto es más eficiente que el reetiquetado porque no afecta células fuera de  $M_v$ , pero ello implica un alto esfuerzo computacional y solo es aplicado a ciertos vértices de frontera. Simulated annealing repara todas las singularidades creando, en el

peor de los casos, células de relleno y probablemente distorsionando el particionamiento más que las herramientas mencionadas previamente. De acuerdo con esta descripción, elaboramos tres algoritmos resumidos en la **Figura 4.9**, cada algoritmo tienen sus propias cualidades y son explicada a continuación.

#### 4.1.5.1. Reparación 1 (Reparación 1 (REP1))

Este algoritmo toma como prioridad  $R_D$ , como segunda opción tenemos  $I$ , por último se recuperan todos los vértices singulares que no hayan podido ser reparados y son llevados a  $R_{SA}$ . Este algoritmo busca reparar la malla con un bajo costo computacional y no alterar el particionamiento de la malla, además evitando en lo posible la inserción de puntos.

#### 4.1.5.2. Reparación 2 (Reparación 2 (REP2))

La prioridad de este algoritmo es  $I$ , siempre que exista la posibilidad, de no ser el caso utilizamos  $R_D$ , finalmente para los vértices singulares restantes utilizamos  $R_{SA}$ . Este algoritmo busca alterar lo menos posible la partición aunque con un costo computacional mayor que **REP1** y adicionando más vértices a la malla.

#### 4.1.5.3. Reparación 3 (REP3)

Este algoritmo está basado únicamente en  $R_{SA}$  y busca reparar la malla sin adicionar nuevos vértices a la malla, sin embargo, puede alterar el particionamiento de manera perceptible.

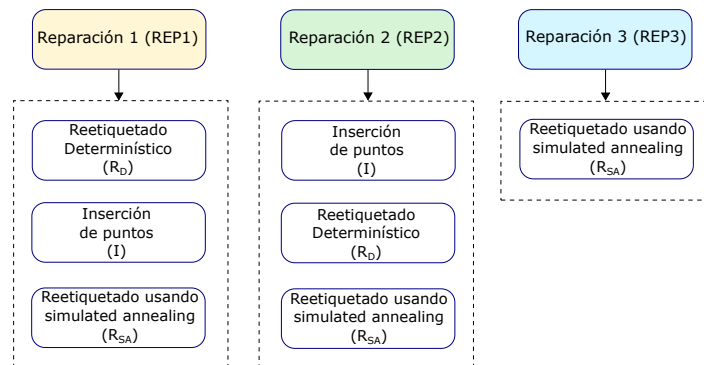


Figura 4.9: Algoritmos de reparación de singularidades.

## 4.2. Suavizado de fronteras

Luego de reparar las singularidades, las fronteras aun presentan irregularidades, para ello, proponemos dos alternativas, primero el reetiquetado para suavizar ([Subsección 4.2.1](#)) y el movimiento de vértices ([Subsección 4.2.2](#)). A continuación, definiremos los siguientes términos para los vértices de frontera:

- Vértice de triple material o más,  $v$  tiene tres o más materiales en sus células incidentes.
- Vértice de doble material,  $v$  tiene dos materiales en sus células incidentes.

Para verificar el suavizado de fronteras utilizamos el histograma de curvaturas. Definimos el histograma de curvaturas en los vértices de frontera, por ejemplo, un vértice de doble material tiene dos curvaturas y un vértice de más de dos materiales, posee más de dos curvaturas.

### 4.2.1. Reetiquetado usando curvaturas discretas ([S<sub>R</sub>](#))

El suavizado de una curva en un plano, en muchos casos se realiza a través de la minimización de una energía funcional la cual puede ser la curvatura total

$$F_2 = \int \kappa \quad (4.6)$$

Así podemos considerar minimizar la siguiente función:

$$F_2 = \sum_{i=1}^{s-1} \|\kappa\|_1 = \sum_{i=1}^{s-1} \int_{M_i} |\kappa| = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{v \in \partial m^i} |\bar{\kappa}| \quad (4.7)$$

En el caso de una superficie que es 2-variedad, ciertos métodos de suavizado (también llamado *fairing*) se basan en la minimización de una energía funcional, la cual puede ser, por ejemplo, la energía de una placa delgada

$$F_3 = \int 4aH^2 + 2(1 - a - b)K \quad (4.8)$$

donde  $H$  es la curvatura media y  $K$  es la curvatura Gaussiana, además  $a, b \in \mathbb{R}$ , sin embargo para superficies cerradas la expresión puede simplificarse a  $F_3 = 4a \int H^2$ , debido a que el teorema de Gauss-Bonnet establece que  $\int K$  es constante en estos casos, lo mismo sucede para el caso discreto según la definición discreta de la curvatura Gaussiana ([Dyn et al., 2001](#)), entonces minimizar  $F$  equivale a minimizar  $H$ . La minimización de  $F$  está relacionado con la  $\mathcal{L}^1$ -norma de  $H$ ,  $\|H\|_1 = \int |H|$ , en nuestro

caso existen diferentes superficies cerradas  $|\partial m_i|$  para los cuales definimos una energía funcional dada por:

$$F_3 = \sum_{i=0}^{s-1} \|H\|_1 = \sum_{i=0}^{s-1} \int_{M_i} |H| = \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{v \in \partial m^i} |\bar{H}| \quad (4.9)$$

Cada vértice de frontera posee como máximo un componente de cada submalla  $m_i$ , el reetiquetado se aplica al componente de un vértice de frontera  $m_{v1}^i$ , asignando una nueva etiqueta a las células que pertenecen a dicho componente. El algoritmo empieza con la malla inicial  $M_0$ , en cada iteración del algoritmo se realiza el reetiquetado de tal forma que se disminuye el costo de función  $F$ , donde  $F = F_2$  si  $d = 2$  o  $F = F_3$  si  $d = 3$ . Determinamos un valor  $rv$  para cada componente de cada vértice de frontera, así tenemos  $rv = F_b/F_a$ , donde  $F_b$  es  $F_a$  son los costos de la función  $F$  antes y después del reetiquetado del componente. Utilizamos una cola prioritaria  $Q$  ordenada de manera descendente de acuerdo con el valor de  $rv$ . Al recorrer  $Q$  se realiza el reetiquetado donde aparecen y desaparecen vértices de frontera, para evitar extraer o contraer las submallas solo tomaremos en cuenta los vértices de frontera originales en  $M_0$ , a los que se actualizarán los valores de  $rv$  de sus componentes en cada iteración y si es necesario también  $Q$  debe ser actualizada.

Es preciso remarcar que  $\mathbf{S_R}$  puede ser empleado en vértices de doble material, de triple material y más, siempre y cuando no se generen vértices singulares, para el caso de modelos son dos submallas utilizamos [Subsección 3.2.3](#) para detectar nuevas singularidades eficientemente, [Figura 3.4a](#), en nuestros experimentos comprobamos que la restricción  $rv > 1,5$  produce mejores resultados.

#### 4.2.2. Reubicación de vértices ( $\mathbf{S_V}$ )

Luego de utilizar  $\mathbf{S_R}$ , la malla aún presenta fronteras con picos, es así que surge el segundo método. Para ello utilizamos uno de los métodos de suavizado basado en la conservación del área/volumen ([Kuprat et al., 2001](#); [Sousa et al., 2007](#)) denominado  $\mathbf{TSUR}$  ([Sousa et al., 2007](#)), un método que es originalmente aplicado a curvas poligonales y a mallas superficiales, para nuestro contexto,  $\mathbf{TSUR}$  puede ser aplicado solo a vértices de doble material.

